

MAT1120 – Prøveeksamen (Uoffisiell) – Høst 2025

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Varighet: 4 timer

Oppgave 1 – Lineære ligningssystemer og matriser

a) Løs følgende lineære ligningssystem ved hjelp av Gauss-eliminasjon:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 5y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

b) Finn den reduserte trappeformen (RREF) til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Bruk resultatet til å finne en basis for løsningsrommet til $A\mathbf{x} = 0$.

Oppgave 2 – Determinanter

a) Beregn determinanten

$$\det(B), \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) La C være matrisen som fås ved at andre rad i B erstattes med $(0, -2, 8)$. Finn $\det(C)$ uten å regne determinanten på nytt.

c) Forklar kort hvorfor en matrise med to identiske rader alltid har determinant lik 0.

Oppgave 3 – Vektorrom

a) Vis at mengden

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$$

er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

b) Finn en basis og dimensjonen til U .

- c) Er følgende mengde et vektorrom?

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$$

Gi en begrunnelse.

Oppgave 4 – Egenverdier og egenvektorer

Gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Finn egenverdiene til A .
- b) For hver egenverdi, finn en tilhørende egenvektor.
- c) Er A diagonaliserbar? Begrunn svaret.

Oppgave 5 – Lineære transformasjoner

La $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$T(x, y) = (3x - y, 2x + y).$$

- a) Finn standardmatrisen for T .
- b) Finn bildet av vektoren $(2, -1)$.
- c) Avgjør om T er inverterbar.

Oppgave 6 – Førsteordens differensialligninger

- a) Løs differensialligningen

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 6e^{-2x}$$

ved hjelp av integrerende faktor.

- b) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y), \quad y(0) = \frac{1}{4}.$$

Oppgave 7 – Andreordens lineære differensialligninger

- a) Løs den homogene ligningen

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

- b) Finn den generelle løsningen til den inhomogene ligningen

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}.$$

- c) Finn den spesifikke løsningen som tilfredsstill

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Oppgave 8 – Ortonormalitet og Gram–Schmidt

Gitt vektorene i $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (1, 0, 1).$$

Bruk Gram–Schmidt-metoden til å konstruere et ortonormalt basispar $\{u_1, u_2\}$ for rommet de to vektorene spenner opp.

Oppgave 9 – Projeksjon

La

$$u = (2, -1, 2), \quad v = (1, 1, 1).$$

- a) Finn projeksjonen av u på v .
- b) Finn komponenten av u som er ortogonal på v .

Oppgave 10 – Bonus (valgfri)

La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finn en formel for A^n ved hjelp av diagonaliseringsmetoden (forutsett at den er diagonaliserbar).