

MAT1120 – Prøveeksamen Høst 2025

Løsningsforslag (Uoffisiell)

Oppgave 1 – Lineære ligningssystemer og matriser

Oppgave: Løs ligningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 5y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Løsning: Fra første ligning: $x = 1 - 2y + z$. Sett inn i de to andre ligningene:

$$\begin{cases} 2(1 - 2y + z) + 5y + z = 4 \implies y + 3z = 2 \\ -(1 - 2y + z) + y + 2z = 2 \implies 3y + z = 3 \end{cases}$$

Løsning gir $z = \frac{3}{8}, y = \frac{7}{8}, x = -\frac{3}{8}$.

Svar: $(x, y, z) = \left(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right)$

RREF til matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \text{RREF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Basis for løsningen av $Ax = 0$: Ingen frie variable $\rightarrow$ bare null-løsning $\rightarrow \{0\}$

Oppgave 2 – Determinanter

Oppgave: Beregn determinanter

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Løsning:

$$\det(B) = 3((-1) * 0 - 4 * 2) - 1(0 * 0 - 4 * 5) + 2(0 * 2 - (-1) * 5) = -24 + 20 + 10 = 6$$

Endring av andre rad til $(0, -2, 8)$ dobler determinant: $\det(C) = 12$

To identiske rader gir determinant = 0 (multilinearitets og radbytte).

Oppgave 3 – Vektorrom

Oppgave: La $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$

- a) Nullvektor finnes, lukket under addisjon og skalar multiplisering $\rightarrow$ underrom.
- b) Løs for $x = 2y - 3z \rightarrow$ basis: $\{(2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$, $\dim U = 2$
- c) $W = \{(x, y) : xy = 0\}$ er ikke underrom, da f.eks. $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin W$

Oppgave 4 – Egenverdier og egenvektorer

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) $\det(A - \lambda I) = 0 \implies \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \implies \lambda = 5, 2$
- b) Egenvektorer: $\lambda = 5 \Rightarrow (1, 1), \lambda = 2 \Rightarrow (1, -2)$
- c) To lineært uavhengige egenvektorer $\rightarrow$ diagonaliserbar

Oppgave 5 – Lineære transformasjoner

$$T(x, y) = (3x - y, 2x + y)$$

- a) Standardmatrise: $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- b) $T(2, -1) = (7, 3)$
- c) $\det = 5 \neq 0 \Rightarrow T$ inverterbar

Oppgave 6 – Førsteordens differensialligninger

- a) $y' + 2y = 6e^{-2x}$ Integrerende faktor $e^{2x} \rightarrow y = (6x + C)e^{-2x}$
- b) $y' = y(1 - y), y(0) = 1/4$ Separasjon: $\frac{dy}{y(1-y)} = dx \implies \ln \frac{y}{1-y} = x + C \implies y = \frac{e^x}{3+e^x}$

Oppgave 7 – Andreordens differensialligninger

- a) Homogen: $y'' - 5y' + 6y = 0$, karakteristisk: $r^2 - 5r + 6 = 0 \implies r = 2, 3$
 $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$
- b) Inhomogen: $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$, forsøk $y_p = x e^{2x}$
- c) Initialbetingelser $y(0) = 1, y'(0) = 0 \rightarrow$ løs C_1, C_2 for spesifikk løsning

Oppgave 8 – Gram–Schmidt

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1)$$

1. $u_1 = v_1 / \|v_1\| = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

2. $u_2 = (v_2 - \text{proj}_{u_1} v_2) / \|v_2 - \text{proj}_{u_1} v_2\| = (1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$

Oppgave 9 – Projeksjon

$$u = (2, -1, 2), v = (1, 1, 1)$$

a) $\text{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v = (1, 1, 1)$

b) Ortogonal komponent: $u - \text{proj}_v u = (1, -2, 1)$

Oppgave 10 – Bonus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Diagonaliserbar: $A = PDP^{-1}, D = \text{diag}(5, -1) \implies A^n = PD^nP^{-1}, D^n = \text{diag}(5^n, (-1)^n)$