

Studieforberedende notat for MAT1120 Høsten 2025

Ole Kristian Aamot

Obligatorisk oppgave 1: Bestått

Obligatorisk oppgave 2: Bestått

Eksamen: 11. desember 2025 (venter)

Innledning

Dette notatet oppsummerer sentrale temaer i emnet **MAT1120 – Lineær algebra og differensiallikninger**, med utgangspunkt i pensum og læringsmål høsten 2025. Formålet er å gi et konsist grunnlag for repetisjon frem mot eksamen.

1 Grunnleggende teori for determinanter

- Definisjon av determinant for kvadratiske matriser.
- Egenskaper ved determinanten:
 - $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
 - $\det(A^T) = \det(A)$
 - $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, dersom A er inverterbar.
- Beregning ved utvikling etter rad eller kolonne.
- Tolkning: volumskala for lineære avbildninger.

2 Generelle vektorrom

- Definisjon av vektorrom over et felt (her: $\mathbb{R}$).
- Eksempler: $\mathbb{R}^n$, mengder av polynomer, matriser, funksjoner.
- Underrom: delmengder lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon.
- Lineær uavhengighet, spenn og basis.
- Dimensjon: antall vektorer i en basis.

3 Naturlige underrom for matriser

- Kolonnerom, radrom og nullrom.
- Relasjoner mellom disse:

$$\dim(\text{kolonnerom}) = \dim(\text{radrom}) = \text{rang}(A).$$

- Nullrommets dimensjon = antall frihetsgrader i løsningen av $A\mathbf{x} = 0$.

4 Basisbytte og koordinatvektorer

- Gitt en basis $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ for V , kan enhver $\mathbf{v} \in V$ uttrykkes som

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + \dots + c_n\mathbf{b}_n.$$

- Koordinatvektor: $[\mathbf{v}]_B = (c_1, \dots, c_n)^T$.
- Basisbytte representeres ved en overgangsmatrise P , slik at

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{v}]_B.$$

5 Lineære avbildninger og matriser

- En lineær avbildning $T : V \rightarrow W$ kan representeres som en matrise A når basiser for V og W er valgt.
- Endring av basis fører til en ny representasjon $A' = P^{-1}AP$.

6 Egenverdier og egenvektorer

- Definisjon: λ er en egenverdi til A dersom $\exists \mathbf{v} \neq 0$ slik at

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

- Løses ved karakteristisk ligning: $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Egenvektorrom: nullrommet til $(A - \lambda I)$.
- Diagonalisering: $A = PDP^{-1}$ dersom A har n lineært uavhengige egenvektorer.

7 Differensiallikninger og dynamiske systemer

- Systemer av differensiallikninger: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.
- Løsning ved egenverdier og egenvektorer:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n.$$

- Diskrete systemer: $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$.

8 Indreproduktrom og ortogonalitet

- Indreprodukt: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$.
- Ortogonalitet: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.
- Ortogonal projeksjon:

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}.$$

- Gram–Schmidt-prosessen for å finne ortonormale basiser.

9 Minste kvadraters metode

- Gitt overbestemt system $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$.
- Løsning:

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}.$$

- Tolkning: ortogonal projeksjon av $\mathbf{b}$ på kolonnerommet til A .

10 Spektralteoremet

- For en symmetrisk matrise $A = A^T$ gjelder:
 - Alle egenverdier er reelle.
 - Egenvektorer som hører til ulike egenverdier er ortogonale.
 - A kan skrives $A = QDQ^T$ med ortogonal matrise Q .

11 Videregående tema: Singulærverdidekomposisjon (SVD)

- Enhver matrise $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kan skrives som

$$A = U\Sigma V^T,$$

der U og V er ortogonale, og Σ er en diagonalmatrise med ikke-negative elementer.

- Bruk:
 - Approksimasjon av matriser.
 - Numerisk beregning av egenverdier.
 - Minste kvadraters løsninger.

Forberedelse til eksamen

- Repetér alle bevis for grunnleggende teoremer.
- Øv på regning med egenverdier og diagonaliserbare matriser.
- Bruk Python/NumPy for å verifisere beregninger.
- Les tidligere eksamensoppgaver i MAT1120.

Eksamensstatus

Obligatorisk oppgave 1: Bestått

Obligatorisk oppgave 2: Bestått

Eksamen: 11. desember 2025 (venter)