

Gauss-integralet og ekstremalpunkter for geografiske lokasjoner

Gauss-integralet

Vi starter med Gauss-integralet:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

I to dimensjoner:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi.$$

Abstraksjon av lokasjonspunkter

La et punkt på jordoverflaten representeres ved:

$$p = (\varphi, \lambda),$$

der

- φ = breddegrad (latitude)
- λ = lengdegrad (longitude)

La et referansepunkt være:

$$p_0 = (\varphi_0, \lambda_0).$$

Vi definerer en lokal tilnærming (kartesisk projeksjon):

$$x = \varphi - \varphi_0, \quad y = \lambda - \lambda_0.$$

Gaussisk vektingsfunksjon

Vi modellerer en lokasjonsavhengig funksjon som:

$$f(\varphi, \lambda) = e^{-((\varphi - \varphi_0)^2 + (\lambda - \lambda_0)^2)}.$$

Dette er en Gaussisk funksjon sentrert i p_0 .

Normalisering

Total "masse" over planet:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(\varphi, \lambda) d\varphi d\lambda = \pi.$$

Ekstremalpunkt

For å finne ekstremalpunktet der funksjonen er maksimal, beregner vi gradienten:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right).$$

Deriver:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -2(\varphi - \varphi_0)e^{-((\varphi - \varphi_0)^2 + (\lambda - \lambda_0)^2)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = -2(\lambda - \lambda_0)e^{-((\varphi - \varphi_0)^2 + (\lambda - \lambda_0)^2)}.$$

Sett $\nabla f = 0$:

$$\varphi = \varphi_0, \quad \lambda = \lambda_0.$$

Andrederivert test

Hessian-matrisen:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \varphi} & \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix}.$$

Ved punktet (φ_0, λ_0) :

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Siden egenverdiene er negative, er dette et maksimum.

Tolkning

Funksjonen $f(\varphi, \lambda)$ kan tolkes som en sannsynlighetstetthet eller påvirkningsmodell rundt et geografisk punkt. Maksimum oppstår i sentrum, og Gauss-integralet gir total vektning.